

حل معادله عمومی انتقال آلودگی در سفره‌های آب زیرزمینی

غلامعباس بارانی*

محمدباقر رهنما**

بهروز صفا***

(دریافت ۸۱/۸/۱۲ پذیرش ۸۲/۳/۱۰)

چکیده

منابع آب زیرزمینی به خصوص در مناطق خشک و نیمه خشک بسیار با اهمیت می‌باشند. فعالیت‌های بشر در زمینه‌های مختلف (کشاورزی، صنعت و شهری) پتانسیل بسیار بالایی برای آلوده نمودن این منابع هستند. اطلاع از چگونگی حرکت آلاینده‌ها در سفره آب زیرزمینی می‌تواند نسبت به شناخت منابع آلاینده و کنترل آنها مؤثر باشد. در مطالعه حاضر به منظور بررسی حرکت آلاینده‌ها در سفره‌های آب زیرزمینی معادله عمومی انتقال سیال در حرکت غیر ماندگار با استفاده از روش عددی حجم کنترل به صورت سه بعدی با به کارگیری طرح اختلاف پیوندی و الگوریتم حل گردید. غلظت به عنوان خاصیت مورد بررسی سیال بوده و با در نظر گرفتن ویژگی‌های سیال (آب) و محیط حرکت آن (خاک)، مدل‌بندی ریاضی انتقال آلودگی در آب‌های زیرزمینی در حرکت غیردائمی انجام شده است. نتایج به دست آمده از مدل از نتایج حاصل از مدل‌های تحلیلی در جهت افقی و در جهت عمودی مورد مقایسه قرار گرفت که از مطابقت خوبی برخوردار بودند این مدل به خوبی می‌تواند برای پیش‌گویی انتقال آلودگی و در نهایت پیش‌گیری و کنترل بحران آلودگی منابع آب زیرزمینی به کار رود.

واژه‌های کلیدی: روش عددی حجم کنترل انتقال سیال - آب‌های زیرزمینی - انتقال آلودگی - مدل‌بندی ریاضی

Solution of the General Equation of Solute Transport through Groundwater Aquifers

Barani, G.A., Prof., Rahnama, M.B., Assist. Prof., and Safa, B., (M.Sc.) Student
Shahid Bahonar University, Kerman, Iran

Abstract

Management and development of ground water resources in arid and semi arid regions is an important task faced by water resources planner. The development of mathematical models provide groundwater planners with quantitative techniques to evaluate groundwater resources and to indentify the probable environmental impacts associated with waste disposal parctices. In the present study, to investigate solute transport in groundwater aquifers, the general unsteady equation of fluid movement through porous media was solved using a three-dimensional numerical control volume method, and the Three Diagonal Matrix Algorithm (TDMA). This process was mathematically modeled, while the concentration of solute was taken as the investigating property of fluid (water), which moves through porous media (soil). Results of the model were compared with the analytical models results in both horizontal and vertical directions, which are in good agreement. This model has the ability to predict the solute transport in groundwater aquifers to control the contaminant crises in water resources storage.

* استاد بخش مهندسی عمران، دانشگاه شهید باهنر کرمان

** استادیار بخش مهندسی آبیاری، دانشگاه شهید باهنر کرمان

*** دانشجوی کارشناسی ارشد تأسیسات آبیاری، دانشگاه شهید باهنر کرمان

با وجود آن که روش‌های تحلیلی بسیاری برای بررسی انتقال آلودگی در سفره‌های آب زیرزمینی ارائه شده است، به دلیل شرایط اولیه و شرایط مرزی ایده‌آلی که در روش‌های تحلیلی در نظر گرفته می‌شود، این روش‌ها قابل کاربرد در تمام جاها و شرایط نمی‌باشند؛ زیرا چنین شرایطی در طبیعت کمتر دیده می‌شوند و بیشتر این روش‌ها حالت تحقیقاتی داشته و قابلیت کاربرد کمتری دارند. در چنین شرایطی روش‌های عددی به دلیل توانایی زیاد برای حل مسایل انتقال محلول در سفره‌های آب زیرزمینی استفاده می‌شوند. تاکنون مدل‌های عددی بسیاری برای این منظور براساس حل معادله پخش انتشار ارائه شده‌اند [9]. نوریشاد و مهران [5] مدل اجزای محدود بالادست را برای مسایل دوبعدی انتقال در محیط‌های شکسته ارائه دادند [5]. بارت و فرند استفاده از روش سه بعدی امتدادهای متناوب گالرکین را معرفی نموده و آنرا با روش معمولی اجزای محدود مقایسه نمودند [1]. آنها در مقاله دوم خود در همان سال [3] از روش فوق برای مدل‌بندی آلودگی در یک منطقه فرضی استفاده نمودند و تأثیر تعداد ابعاد در مسئله (حل به صورت دوبعدی یا سه بعدی) را بررسی نمودند [3]. فرند و حکانن [3] از این روش برای شبیه‌سازی آلودگی فاضلاب بردن¹ استفاده نمودند [3]. این آلودگی قبلاً با مدل تفاضلی‌های محدود و اجزای محدود شبیه‌سازی شده بود.

پوتی و همکاران روش حجم محدود را با المان‌های سه ضلعی (به صورت دو بعدی) برای انعطاف‌پذیر نمودن روش برای محیط‌هایی با اشکال هندسی و شرایط مرزی پیچیده به کار بردند [7]. کندی و لنوکس یک مدل حجم کنترل برای انتقال محلول در محیط‌هایی با شکستگی منفرد ارائه نمودند [8]. مدل آنها وقتی با مدل‌های دیگر مقایسه شد، نتایج بهتری را نشان می‌داد. تاکنون از بین روش‌های عددی، روش تفاضلی‌های محدود و اجزای محدود به دفعات در مسایل آبی و حرکت سیال استفاده شده‌اند؛ به ویژه روش اجزای محدود به دلیل امکان مناسب‌تر مش‌بندی شکل‌ها و مرزهای پیچیده بیشتر مورد توجه بوده است. لکن روش حجم کنترل دارای دو برتری می‌باشد:

¹ Borden

یکی بقای جرم در آن که طبیعت ذاتی این روش می‌باشد و دوم، تعبیر صحیح پدیده‌های فیزیکی این روش است که انتظار می‌رود خطا در این روش کمتر از دو روش عددی دیگر باشد، که این مورد در تحقیق کندی و لنوکس ثابت شده است. طبیعت سه بعدی حل مسئله نیز یکی از نقاط مثبت تحقیق می‌باشد که براساس تحقیق بارت و فرند نتایج به مراتب بهتری نسبت به روش حل دو بعدی در دو مقطع طولی و عمودی به طور هم‌زمان نشان می‌داد. با توجه به ویژگی‌های بیان شده، انتظار می‌رود مدل به نحو مناسبی بتواند پاسخ‌گوی مسایل مطرح شده پیرامون انتقال آلودگی در منابع آب باشد. در ضمن با توجه به حل معادله عمومی انتقال برای مسئله مطرح شده، روش حل قابل کاربرد در سایر مسایل مربوط به حرکت سیال و سایر ویژگی‌های سیالات خواهد بود. در این تحقیق ابتدا با استفاده از روش حجم کنترل معادله عمومی انتقال در حالت غیر ماندگار و سه بعدی به صورت خطی درآمده و سپس با استفاده از طرح اختلاف پیوندی و الگوریتم TDMA² ضرایب معادلات تعیین گشته و برنامه کامپیوتری برای حل معادلات نوشته شد. سپس صلاحیت مدل با استفاده از روش‌های تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در نهایت مدل قابل کاربرد در مناطق مختلف برای بررسی پیشرفت آلودگی می‌باشد.

متن اصلی

معادله عمومی حاکم بر انتقال سیال در حالت بقاء و به صورت غیر ماندگار به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi U) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S\phi \quad (1)$$

که در آن:

ϕ : خاصیتی از سیال که مورد بررسی است که در این

مسئله C یعنی غلظت می‌باشد؛

ρ : جرم حجمی سیال؛

U: گرادیان سرعت؛

t: زمان؛

Γ : ضریب نفوذ؛

² Three Diagonal Matrix Algorithm

S ϕ : نرخ کاهش یا افزایش ناشی از چشمه‌ها می‌باشد. حالت گسترده این معادله برای غلظت به عنوان یک ویژگی سیال به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x \cdot C)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y \cdot C)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z \cdot C)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + S \quad (2)$$

که در آن:

Di: ضریب پراکندگی هیدرودینامیکی در راستای i می‌باشد؛

C: غلظت در موقعیت مکانی (x,y,z) در زمان t؛
Vi: سرعت میانگین خطی در جهت i و S: خطی شده جمله چشمه شرط مرزی در نظر گرفته شده در معادله بالا نوع اول یعنی معلوم، بودن غلظت در بخشی از مرزها است.

به عبارت دیگر برای x, y, z, t های معلوم C₀ غلظت معلوم می‌باشد، که به زبان ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C_0 = C(x, y, z, t) \quad (3)$$

به دلیل آن که معادله در حالت غیردائمی حل می‌شود، نیاز به تعیین شرایط اولیه دارد که به صورت پروفیل معلوم غلظت در زمان t=0 تعریف می‌گردد، به بیان ریاضی:

$$C(x, y, z, t) = f(x, y, z), t = 0 \quad (4)$$

برای حل این معادله ابتدا حجم کنترل سه بعدی به صورتی که در شکل ۱ دیده می‌شود، یعنی یک مکعب تعریف می‌شود، سپس بر روی این حجم کنترل و نیز نسبت به زمان از معادله فوق انتگرال‌گیری شده که با در نظر گرفتن جانشینی A به جای سمت چپ و B به جای سمت راست حاصل می‌گردد:

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \int_{CV} A = \int_{t}^{t+\Delta t} \int_{CV} B \quad (5)$$

معادله فوق پس از انتگرال‌گیری بر روی حجم کنترل و زمان به صورت کلی زیر خطی خواهد شد:

$$a_p C_p = a_w C_w + a_e C_e + a_s C_s \quad (6)$$

$$+ a_n C_n + a_b C_b + a_t C_t + a_p^0 C_p^0$$

که در معادله خطی فوق:

a_i: ضریب جملات؛ C_i: غلظت در گره‌های همسایه، مجهول زیرنویس P معرف گره مجهول و زیرنویس‌های E, S, N, B و T به ترتیب معرف گره‌های غربی، شرقی، جنوبی، شمالی، زیرین و بالایی گره مجهول می‌باشند. بالانویس صفر معرف مقادیر در زمان گذشته است که معلوم هستند. از الگوی اختلاف پیوندی برای برآورد عبارت‌های انتشار و جا به جایی و از طرح ضمنی کامل برای برآورد انتگرال زمانی استفاده می‌شود، این امر به این لحاظ انجام می‌پذیرد که هر دوی آنها به صورت غیر مشروط پایدار می‌باشند. با توجه به ویژگی طرح اختلاف پیوندی که برای عدد پیکلت بین ۲ و -۲ از طرح تفاضل مرکزی و برای اعداد خارج از این محدوده از طرح اختلاف بالادست استفاده می‌نماید، ضرایب برای حالات مختلف عدد پیکلت به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$a_w = \max[D_w + F_w, (D_w + F_w/2), D_w] \quad (7)$$

$$a_e = \max[D_e - F_e, (D_e - F_e/2), D_e] \quad (8)$$

$$a_s = \max[D_s + F_s, (D_s + F_s/2), D_s] \quad (9)$$

$$a_n = \max[D_n - F_n, (D_n - F_n/2), D_n] \quad (10)$$

$$a_b = \max[D_b + F_b, (D_b + F_b/2), D_b] \quad (11)$$

$$a_t = \max[D_t - F_t, (D_t - F_t/2), D_t] \quad (12)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_b + a_t + a_p^0 + \Delta F \quad (13)$$

$$\Delta F = F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b \quad (14)$$

$$F_i = \rho_i C_i V_i$$

که در عبارت بالا:

$$a_p^0 = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\Delta V = \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z$$

البته ذکر این نکته لازم است که در طرح اختلاف پیوندی در مورد اعداد پیکلت خارج از محدوده ۲ و -۲ به لحاظ کوچک بودن تأثیر انتشار و ایجاد پراکنش عددی این جزء کوچک، ضرایب انتشار در این حالات برابر صفر گرفته می‌شود. پس از خطی نمودن معادلات و تعیین ضرایب با استفاده از الگوریتم ماتریس سه قطری توسعه یافته (TDMA) و کد کامپیوتری فورترون ۷۷ برنامه کامپیوتری برای حل معادلات نوشته شد.

مقایسه نتایج حاصل از مدل با نتایج به دست آمده از مدل‌های تحلیلی نشان دهنده مطابقت خوب آنها می‌باشد.

سرعت محاسبات و انعطاف‌پذیری مدل در محاسبه غلظت آلاینده‌ها در مسیر حرکت آن در جهات مختلف می‌تواند شاخص برتری این مدل نسبت به سایر مدل‌های تحلیلی و عددی دیگر که در یک دو بعد حل شده‌اند باشد.

بحث

برای ارزیابی مدل به جهت انتقال طولی با در نظر گرفتن سرعت و انتشار برابر صفر در جهت y و z ، مدل ارائه شده را با مدل یک بعدی ارائه شده توسط اگاتا و بنکس [6] که با معادله زیر بیان می‌شود، مقایسه نمودیم:

$$C = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{L - V_x \cdot t}{2\sqrt{D_L \cdot t}} \right) + \exp \left(\frac{V_x \cdot L}{DL} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{L + V_x \cdot t}{2\sqrt{D_L \cdot t}} \right) \right] \quad (15)$$

که در معادله فوق:

C : غلظت آلاینده در مکان مورد نظر در زمان t ; C_0 :

غلظت اولیه آلاینده در زمان $t = 0$; L : طول مسیر تا

محل محلی که غلظت آلاینده در آن محل مورد نظر می‌باشد؛ D_L و V_x به ترتیب ضریب پراکندگی هیدرودینامیکی در جهت جریان؛ و erfc تابع خطای مکمل می‌باشد. مسئله مدل شده برای مقایسه به شرح زیر است:

زمان کل 40 روز و گام‌های زمانی 0/05 روز برای مسافت 200 متر با 20 گره بر روی هر یک از محورهای آلاینده‌ها در گره یک قرار دارد. غلظت ثابت آلاینده 10

واحد در نظر گرفته است. نتیجه این مقایسه در شکل 2 نمایش داده شده است. برای مقایسه داده‌های مدل در مقطع قائم از مدل ارائه شده توسط شین و جواندل [8] برای مقطع قائم سفره که به صورت معادله (16) برای فاصله معین از منبع آلودگی ارائه شده است، مقایسه گردید که در شکل 3 نمایش داده شده است ($t > x+1$)

$$C_n(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_x^{x+1} \frac{e^{-z^2/(4\alpha\tau)}}{\tau(x+1-\tau)} d\tau \quad (16)$$

که اجزای بی بعد شده آن عبارتند از:

$$C_n = \frac{C_n}{C_0} \quad (17)$$

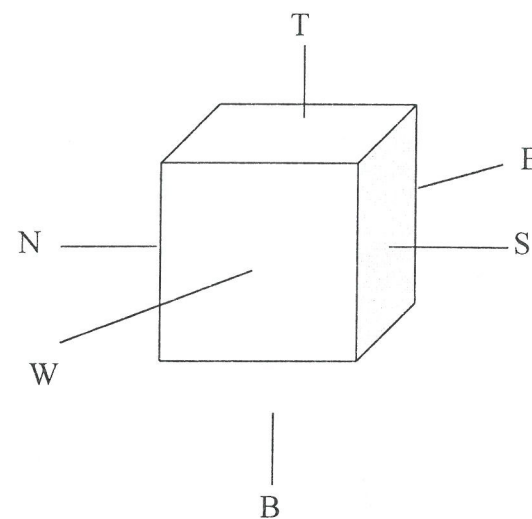
$$x = \frac{x}{l} \quad (18)$$

$$z = \frac{z}{l} \quad (19)$$

$$t = \frac{vt}{l} \quad (20)$$

$$\alpha_z = \frac{\alpha_z}{l} \quad (21)$$

در عبارات فوق: $C_n = (x, y, z, t)$ غلظت در نقطه (x, z) و زمان t در ناحیه n ; α_z ضریب انتشار در جهت عمودی؛ و l عرض سطح آلودگی که برای بی بعد کردن از آن استفاده شده است. لازم به ذکر است که در تمام مقایسه‌ها به لحاظ مکانی، زمانی، ضرایب انتشار و مشخصات جریان شرایط یکسان در نظر گرفته شده است.



شکل 1- شکل یک حجم کنترل (B و T, N, S, W, E) به ترتیب وجوه شرقی، غربی، جنوبی، شمالی، بالایی و زیرین

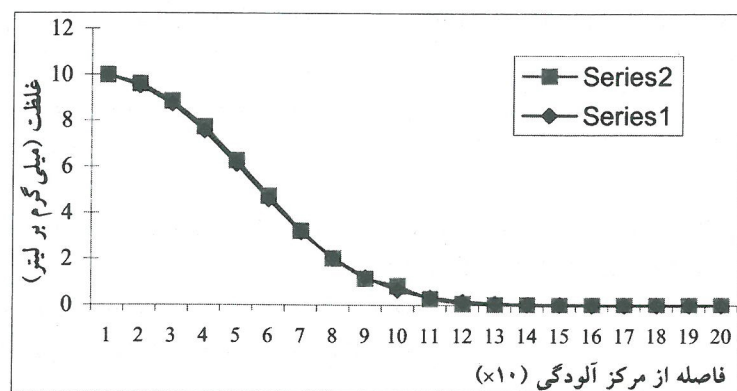
نتیجه‌گیری

(1) با مدل ارائه شده می‌توان به آسانی انتقال آلودگی را در مناطق مختلف مورد بررسی قرار داد و پاسخ‌های قابل قبول برای بررسی و پیش‌گویی انتقال آلودگی ارائه نمود.

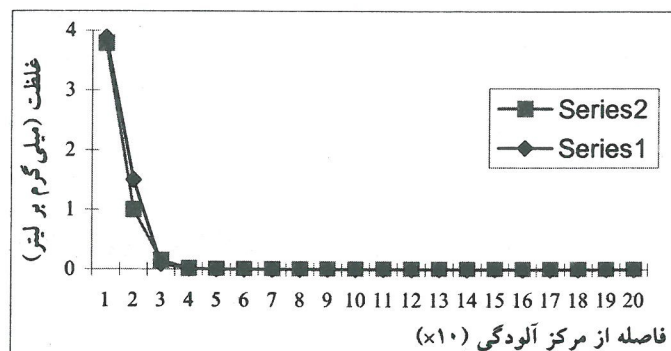
(2) با توجه به شکل 2 می‌توان دریافت مدل برای انتقال طولی در نقاط نزدیک به منبع آلاینده مقادیر کمی

پایین و در فواصل دور کمی بالا پیش‌بینی می‌کند؛ این در حالی است که پاسخ‌های مدل برای مقطع عمودی عکس این حالت با نوسان بیشتری روی می‌دهد.

(3) با توجه به سادگی تفهیم شرایط فیزیکی به مدل، به آسانی می‌توان از آن برای بررسی روند آلودگی ناشی از نشت از مخازن زیرزمینی همچون مخازن نفت و مواد شیمیایی استفاده نمود.



شکل 2- مقایسه نتایج مدل عددی (سری 1) با نتایج تحلیلی (سری 2) برای انتقال در جهت طولی [6]



شکل 3- مقایسه پاسخ تحلیلی [8] با پاسخ عددی در مقطع عمودی سفره در فاصله سی متری از منبع آلودگی

- 1- Burnett, R.D., and Frind, E.O., (1987). "Simulation of Contaminant Transport in Three Dimensional-1. The Alternating Direction Galerkin Technique", Water Resource Research, Vol. 23, No. 4, pp: 683-694.
- 2- Burnett, R. D., and Frind, E. O., (1987). "Simulation of Contaminant Transport in Three Dimensional-2. Dimensionality Effects", Water Resource Research, Vol. 23, No. 4, pp: 695-705.
- 3- Frind, E.O., and Hokkanen, G.E., (1987). "Simulation of the Borden Plume Using the Alternating Direction Galerkin Technique", Water Resource Research, Vol. 23, No. 5, pp: 918-930.
- 4- Kennedy, C.A., and Lennox, C., (1995). "A Control Volume Model of Solute Transport in a Single Fracture", Water Resource Research, Vol. 31, No. 2, pp:313-322.
- 5- Noorishad, J., and Mehran, M., (1982), "An Upstream Finite Element Method for Solution of Transient Transport Equation in Fractured Porous Media", Water Resources Research. Vol. 18, No. 3, Pages 588-596.
- 6-Ogata A., and Banks, R.B., (1961). "A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media", U.S. Geol. Surv. 411-A
- 7- Putti, M., Yeh, W. W., and Mulder, W. A., (1990). "A Triangular Finite Volume Approach with High-Resolution Upwind Terms for the Groundwater Transport Equations", Water Resource Research, Vol. 26, No. 12, pp: 2865-2880.
- 8- Shan, C., and Javandel, I., (1997). "Analytical Solutions for Solute Transport in a Vertical Aquifer Section", Contaminant Hydrology, Vol. 27, pp: 63-82.
- 9- Sun, N., and Yeh, W.W., (1987). "A Proposed Upstream Weight Numerical Method for Simulating Pollutant Transport in Groundwater", Water Resource Research, Vol. 19, No. 6, pp: 1489-1500.